

Problema 1

Disponemos de una varilla metálica de 10 mm^2 de sección y 100 mm de longitud, de la que suspendemos una carga vertical en su extremo de 1500 N . Conociendo que el material posee un módulo de elasticidad $E = 120 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ y un límite elástico de $250 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$, deseamos conocer:

- a) ¿Recuperará el alambre su longitud primitiva si se retira la carga?
- b) ¿Cuál será el alargamiento unitario y total en estas condiciones?
- c) ¿Qué diámetro mínimo habrá de tener una barra de este material para que sometida a una carga de $8 \cdot 10^4 \text{ N}$ no experimente deformación permanente?



- a) En primer lugar calculamos la tensión de tracción aplicada a la varilla y compararemos su valor con el límite elástico:

$$\sigma = \frac{F}{A_0} = \frac{1500}{10 \cdot 10^{-6}} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$$

como el valor es inferior al límite elástico, la varilla no sufrirá deformación permanente y recuperará la longitud inicial.

- b) Calculemos ahora el alargamiento unitario:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{1,5 \cdot 10^8}{120 \cdot 10^9} = \frac{150}{120 \cdot 10^3} = 1,25 \cdot 10^{-3}$$

y el alargamiento total será:

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l_0 = 1,25 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 1,25 \cdot 10^{-1} \text{ mm} = 0,125 \text{ mm}$$

- c) Calculamos la sección mínima, que vendrá determinada por el valor del límite elástico:

$$A_{\min} = \frac{F}{\sigma_E} = \frac{8 \cdot 10^4}{250 \cdot 10^6} = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

el diámetro mínimo de la varilla será consecuencia de la sección mínima:

$$D = \sqrt{\frac{4 \cdot A_{\min}}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 3,2 \cdot 10^{-4}}{\pi}} = 0,02018 \text{ m} = 20,18 \text{ mm}$$

Problema 2

Una probeta de sección cuadrada y 10 mm de lado con 2 mm de entalla en el centro de una de sus caras, se somete a un ensayo de flexión por choque con un martillo de 20 Kgf, cayendo desde una altura de 90 cm y recuperando, tras la rotura, una altura de 70 cm. Realice un esquema del ensayo propuesto y determine:

- a) Energía absorbida por la probeta.
- b) Resilencia del material.

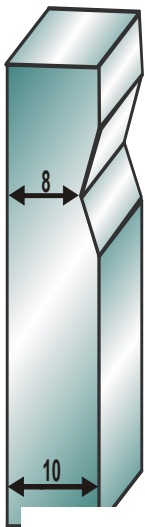


Figura n° 1

- a) La probeta tendrá una forma similar a la figura n° 1 y la sección en la zona de la entalla será de:

$$A = 10 \cdot 8 = 80 \text{ mm}^2$$

La energía absorbida por la probeta será la diferencia entre la energía potencial que posee el martillo debido a su altura y la energía potencial que adquiere en la recuperación:

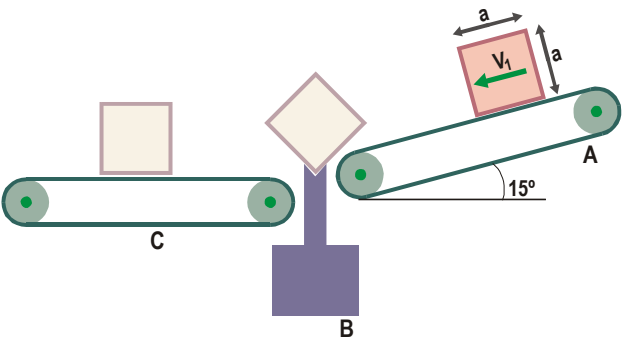
$$E_p = m \cdot g \cdot (h_1 - h_2) = 20 \cdot (90 - 70) = 20 \cdot 20 = 400 \text{ Kgf} \cdot \text{cm}$$

$$400 \text{ Kgf} \cdot \text{cm} = 400 \cdot 9,8 \cdot 1 \cdot 10^{-2} = 39,2 \text{ N} \cdot \text{m} = 39,2 \text{ J}$$

- b) Siendo A_0 la sección en la zona de entalla, la resilencia se calcula mediante la siguiente expresión:

$$\rho = \frac{E_p \text{ absorbida}}{A_0} = \frac{39,2}{0,8} = 49 \text{ J/cm}^2$$

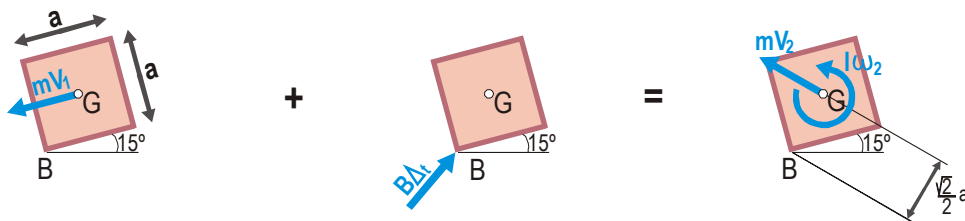
Problema 3



Una caja de sección cuadrada de lado a y masa m desciende por una cinta transportadora **A** con una velocidad constante v_1 . Al llegar al final de la cinta, la esquina de la caja choca con un soporte rígido **B**. Suponiendo que el choque en **B** sea perfectamente plástico, obtener una expresión del mínimo valor del módulo de la velocidad v_1 para el cual la caja gire alrededor de **B** y alcance la cinta transportadora **C**.

Puesto que el choque entre la caja y el soporte es perfectamente plástico, aquél girará alrededor de **B** durante el choque. Se aplica el **Teorema de los Momentos** a la caja teniendo en cuenta que la única fuerza impulsiva externa (**Imp. Ext.**) a la caja es la reacción impulsiva en **B**.

$$\text{Sistema de Momentos}_1 + \text{Sistema de Imp. Ext.}_{1 \rightarrow 2} = \text{Sistema de Momentos}_2$$



+ \odot momentos respecto a **B**:
$$(m \cdot v_1) \left(\frac{1}{2} a \right) + 0 = (m \cdot v_2) \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot a \right) + I \cdot \omega_2 \quad (1)$$

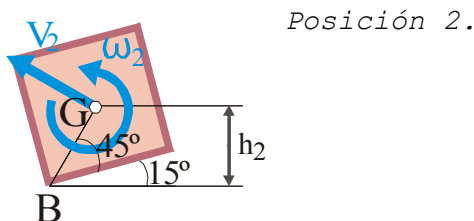
Como la caja gira alrededor de **B**, obtenemos que:

$$\left. \begin{aligned} v_2 &= (GB) \cdot \omega_2 = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot a \cdot \omega_2 \\ I &= \frac{1}{6} m \cdot a^2 \end{aligned} \right\}$$

sustituyendo ambas expresiones en la ecuación anterior (1) obtenemos la siguiente igualdad:

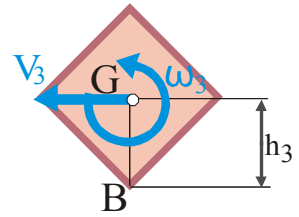
$$(m \cdot v_1) \left(\frac{1}{2} a \right) = m \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot a \cdot \omega_2 \right) \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot a \right) + \frac{1}{6} m \cdot a^2 \cdot \omega_2 \longrightarrow v_1 = \frac{4}{3} a \cdot \omega_2 \quad (2)$$

Aplicando el Principio de conservación de la energía entre las posiciones 2 y 3, tendremos que:



$v_2 = W \cdot h_2$ como $v_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot a \cdot \omega_2$, obtenemos que :

$$T_2 = \frac{1}{2}m \cdot v_2^2 + \frac{1}{2}I \cdot \omega_2^2 = \frac{1}{2}m \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot a \cdot \omega_2 \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}m \cdot a^2 \right) \cdot \omega_2^2 = \frac{1}{3}m \cdot a^2 \cdot \omega_2^2$$



$$GB = \frac{1}{2}\sqrt{2}a = 0,707a$$

$$h_2 = GB \cdot \sin(45^\circ + 15^\circ) = 0,612a$$

Posición 3. Como la caja debe alcanzar la cinta transportadora **C**, tendrá que pasar por la posición **3** en la que **G** está en la vertical de

B. Además, como queremos calcular la mínima velocidad para que la caja alcance esta posición, tomamos $\mathbf{v}_3 = \mathbf{\omega}_3 = \mathbf{0}$.

Por consiguiente, $\mathbf{T}_3 = \mathbf{0}$ y $\mathbf{V}_3 = \mathbf{W}_3 \mathbf{h}_3$.

$$h_3 = GB = 0,707a$$

Conservación de la energía:

$$T_2 + V_2 = T_3 + V_3$$

$$\frac{1}{3}m \cdot a^2 \cdot \omega_2^2 + W \cdot h_2 = 0 + W \cdot h_3$$

$$\omega_2^2 = \frac{3W}{m \cdot a^2}(h_3 - h_2) = \frac{3g}{a^2}(h_3 - h_2) \quad (3)$$

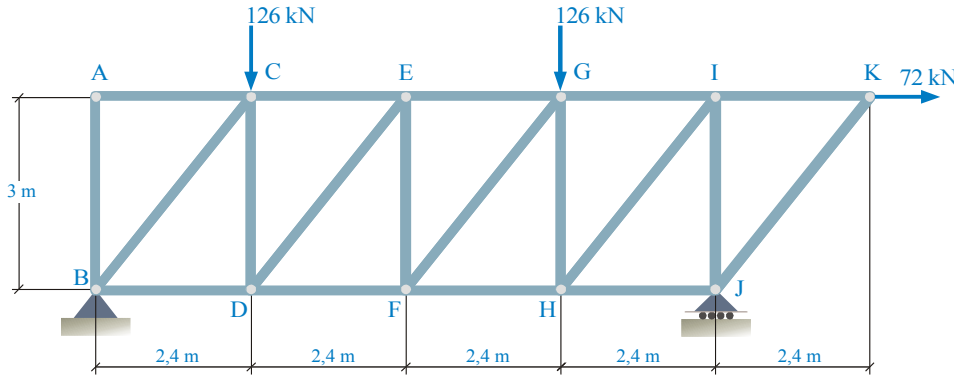
Por último, si sustituimos los va-

lores calculados de \mathbf{h}_2 y \mathbf{h}_3 en la ecuación anterior (3), obtenemos que:

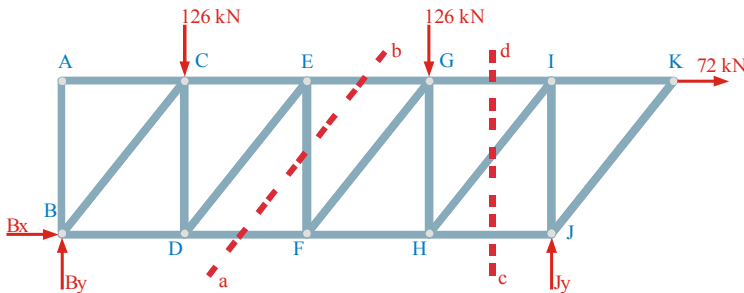
$$\omega_2^2 = \frac{3g}{a^2}(0,707a - 0,612a) = \frac{3g}{a^2}(0,095a) \quad \omega_2 = \sqrt{0,285 \frac{g}{a}}$$

$$v_1 = \frac{4}{3}a \cdot \omega_2 = \frac{4}{3}a \cdot \sqrt{0,285 \frac{g}{a}} \quad \underline{v_1 = 0,712\sqrt{g \cdot a}}$$

Problema 4

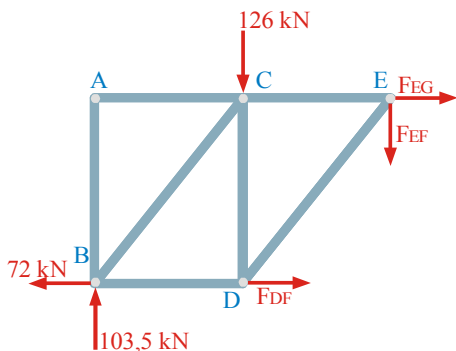


En la estructura de la figura debemos calcular los esfuerzos que soportan las barras **EF** y **GI**. Realizar por el Método de las Secciones.



Comencemos por estudiar la estructura completa, las fuerzas externas que actúan sobre ella son las cargas aplicadas y las reacciones en los apoyos **B** y **J**. Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos son:

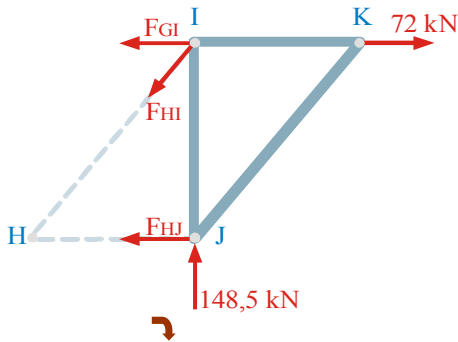
$$\begin{aligned}
 +\curvearrowright \sum M_B = 0; & \quad -(126\text{kN}) \cdot (2,4\text{m}) - (126\text{kN}) \cdot (7,2\text{m}) - (72\text{kN}) \cdot (3\text{m}) + J_y \cdot (9,6\text{m}) = 0 & \quad \underline{J_y = 148,5\text{kN}} \\
 +\rightarrow \sum F_x = 0; & \quad B_x + 72\text{kN} = 0 & \quad \underline{B_x = -72\text{kN} = 72\text{kN} \leftarrow} \\
 +\curvearrowright \sum M_J = 0; & \quad (126\text{kN}) \cdot (7,2\text{m}) + (126\text{kN}) \cdot (2,4\text{m}) - (72\text{kN}) \cdot (3\text{m}) - B_y \cdot (9,6\text{m}) = 0 & \quad \underline{B_y = 103,5\text{kN}}
 \end{aligned}$$



La sección a-b corta tres barras, una de ellas es la **EF**. Nos quedamos con la parte izquierda de la estructura, representada en la figura. Aplicamos el equilibrio de fuerzas:

$$+\rightarrow \sum F_y = 0; \quad 103,5\text{kN} - 126\text{kN} - F_{EF} = 0 \quad \underline{F_{EF} = -22,5\text{kN}}$$

Consideramos la barra **EF** trabajando a tracción, el signo negativo que hemos obtenido indica que se ve sometida a un esfuerzo de compresión.



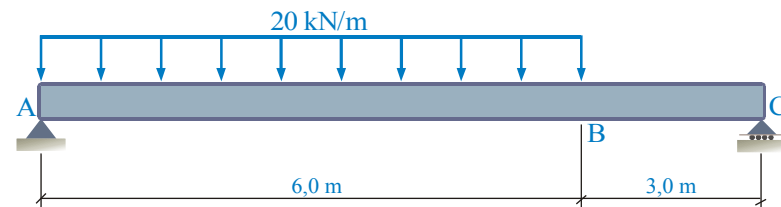
La sección c-d corta tres barras, una de ellas es la **GI**. Nos quedamos con la parte derecha de la estructura, representada en la figura. Aplicamos el equilibrio de momentos en **H**:

$$+\circlearrowleft \sum M_H = 0;$$

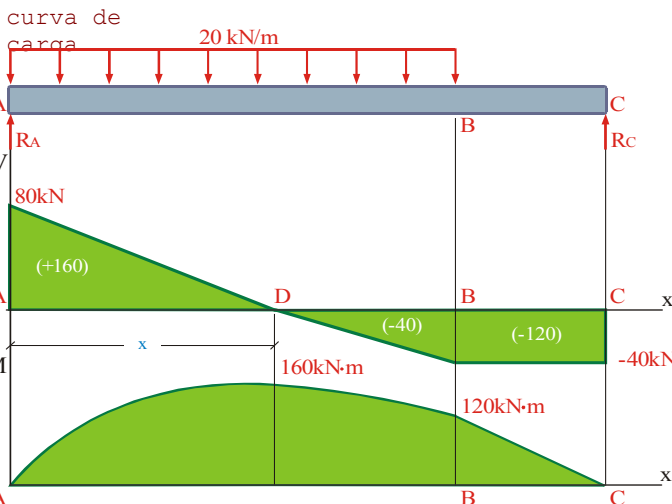
$$(148,5\text{kN}) \cdot (2,4\text{m}) - (72\text{kN}) \cdot (3\text{m}) + F_{GI} \cdot (3\text{m}) = 0 \quad \underline{F_{GI} = -46,8\text{kN}}$$

Como antes el signo negativo en la barra **GI** indica que se ve sometida a un esfuerzo de compresión.

Problema 5



Para la viga representada en la figura debemos dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector. Además, determinar la coordenada y el valor del momento flector máximo.



Determinamos las reacciones considerando el diagrama de sólido libre de la viga entera:

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0;$$

$$R_C \cdot (9\text{m}) - (120\text{kN}) \cdot (3\text{m}) = 0 \quad \longrightarrow \quad \underline{R_C = 40\text{kN}}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0;$$

$$R_A + 40\text{kN} - 120\text{kN} = 0 \quad \longrightarrow \quad \underline{R_A = 80\text{kN}}$$

Vamos a definir el diagrama de fuerza cortante: a la derecha de **A** tenemos $V_A = +80\text{kN}$. Como la variación de la fuerza cortante entre dos puntos es igual al área bajo la curva de carga entre los mismos con signo negativo, tenemos que:

$$V_B - V_A = -(20\text{kN/m}) \cdot (6\text{m}) = -120\text{kN}$$

$$V_B = -120\text{kN} + V_A = -120\text{kN} + 80\text{kN} = -40\text{kN} \quad \longrightarrow \quad \underline{V_B = -40\text{kN}}$$

Como entre los puntos **A** y **B** la variación de la fuerza cortante es proporcional al aumento de coordenada ($dV/dx = \text{cte}$), entre estos puntos el diagrama de fuerza cortante se representa con una recta. Entre **B** y **C** no existe carga, la fuerza cortante entre estos puntos es constante, por consiguiente tenemos que:

$$V_C - V_B = 0 \quad V_C = V_B = -40\text{kN} \longrightarrow V_C = -40\text{kN}$$

Vamos a definir el diagrama de momento flector: el momento flector máximo corresponde al punto **D** donde $V=0$.

$$V_D - V_A = -(20\text{kN/m}) \cdot x$$

$$0 - 80\text{kN} = -(20\text{kN/m}) \cdot x \longrightarrow \underline{x = 4\text{m}}$$

Se calcula el área de cada porción del diagrama de fuerza cortante (aparece en el diagrama entre paréntesis) y como dicho área entre dos puntos es igual a la variación de momento flector de uno a otro punto, podemos ir deduciendo que:

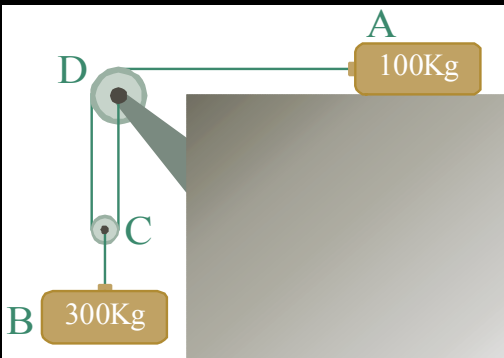
$$M_D - M_A = +160\text{kN} \cdot \text{m} \longrightarrow M_D = +160 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_B - M_D = -40\text{kN} \cdot \text{m} \longrightarrow M_B = +120 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_C - M_B = -120\text{kN} \cdot \text{m} \longrightarrow M_C = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

El diagrama de momento flector es un arco de parábola seguido de un segmento recto y el momento flector máximo lo encontramos en el punto **D**, $M_{\text{máx}} = M_D = +160 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Problema 6



En la figura anterior tenemos dos bloques que parten del reposo y deseamos conocer la aceleración de los mismos y la tensión que resiste cada una de las cuerdas. Suponer que no existe rozamiento en el plano ni en las poleas, además las masas de dichas poleas se consideran despreciables.