EJEMPLO DE PROBLEMA

PROBLEMA DE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Sean *a* y *b* números naturales (sin considerar el cero), sea X una variable aleatoria discreta con valores enteros estrictamente positivos de manera que:

$$\left.\begin{array}{ll} P(X=x)=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b} & si \quad 1\le x\le ab \\ P(X=x)=0 & si \quad x>ab \end{array}\right\}$$

a) ¿Qué condición debe satisfacer *a* y *b* para que la sucesión, de término general *p(x)=P(X=x)*, pueda ser considerada como la ley de la probabilidad de X?

b) Determinar la función de distribución *F(x)*. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación *F(x)*= 1/2? (con las medianas de X)

c) Calcular la esperanza de X. ¿Qué valores habrá que dar a *a* y a *b* para que *E(X)*=7/2?

Solución:

a) Para que sea función de probabilidad se debe cumplir que $\sum_{x=1}^{\infty} P(X=x)=1 \Rightarrow \sum_{x=1}^{ab}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=1$

Y como $\sum_{x=1}^{ab}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\sum_{x=1}^{ab}1=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)ab=\left(\frac{b-a}{ab}\right)ab=b-a$

De donde se deduce que $1=b-a$

b) La función de distribución se obtiene haciendo $F(x)=P(X=x)$. Así pues,

$$Si \quad 1\le x\le ab \quad F(x)=\sum_{j=1}^{x}P(X=j)=\sum_{j=1}^{x}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\sum_{j=1}^{x}1=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)x$$

$$Si \quad x>ab \quad F(x)=\sum_{j=1}^{x}P(X=j)=\sum_{j=1}^{ab}P(X=j)+\sum_{j=ab+1}^{x}P(X=j)=1$$

Luego se tiene como función de distribución:

$$F(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)x & si \;\; 1\le x\le ab \\ 1 & si \;\; x>ab\end{cases}$$

Y por tanto las soluciones de la ecuación ***F(x)=1/2*** son:

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{a-b}=\frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{1}=\frac{ab}{2}$$

c) $E(x)=\sum_{x=1}^{ab} xP(x)=\sum_{x=1}^{ab}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)x=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\sum_{x=1}^{ab} x=\frac{b-a}{ab}\cdot\frac{ab(1+ab)}{2}=\frac{1+ab}{2}$

Así pues ***E(x)=7/2*** si: $\frac{7}{2}=\frac{1+ab}{2}\Rightarrow ab=6$ Como, además, sabíamos que b-a=1, se tiene que:

$a(a+1)=6\Rightarrow a^2+a-6=0\Rightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1+5}{2}$ de donde se obtienen dos soluciones a=2 y a=-3 pero esta última no es válida porque a era un número natural.

Por tanto, la solución buscada es a=2 y b=3.