

EJEMPLO DE PROBLEMA

PROBLEMA DE ANALISIS

Se considera la ecuación $x^2 - y^2 = n$

a) Si “n” es un número real dado y los números reales x, y, n , tomados en este orden están en progresión geométrica, discutir las posibles soluciones, según el valor de n .

b) ¿Para qué valores de “n” la suma de los “p” primeros términos de la progresión geométrica x, y, n, \dots es finita cuando $p \rightarrow +\infty$?

Solución:

a) 1. Si $n = 0$ y k es la razón de la progresión, es $y = kx$, $0 = n = k^2x$.

i) Si además es $k = 0$, $y = 0x \Rightarrow y = 0$. Sustituyendo en $x^2 - y^2 = n$, obtenemos $x^2 - 0^2 = 0$, es decir $x = 0$.

ii) Si es $k \neq 0$, $0 = n = k^2x \Rightarrow x = 0$. Así, $x = y = n = 0$.

* De ambos apartados obtenemos que si $n = 0$, la única solución es $(x, y) = (0, 0)$.

2. Sea $n \neq 0$. Necesariamente la razón de la progresión es $k \neq 0$. Sea $\alpha = \frac{1}{k}$.

Evidentemente $y = \alpha n$, $x = \alpha^2 n$. Sustituyendo en $x^2 - y^2 = n$, y dividiendo por n :

$$n\alpha^4 - n\alpha^2 - 1 = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{n \pm \sqrt{n^2 + 4n}}{2n}$$

i) $n^2 + 4n < 0 \Rightarrow \alpha$ no es real \Rightarrow no existen soluciones reales de $x^2 - y^2 = n$ con x, y, n en progresión geométrica.

ii) $n^2 + 4n = 0$ y $n \neq 0$ nos da $n = -4$.

$$\text{Si } n = -4, \alpha^2 = \frac{-4 \pm 0}{-8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

De $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $n = -4$, $y = \alpha n$, $x = \alpha^2 n$, obtenemos $y = -2\sqrt{2}$, $x = -2$.

De $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $n = -4$, $y = \alpha n$, $x = \alpha^2 n$, obtenemos $y = 2\sqrt{2}$, $x = -2$.

★ Resumiendo, $n = -4$ nos da como soluciones $(x, y) = (-2, \pm 2\sqrt{2})$.

iii) $n^2 + 4n > 0 \Leftrightarrow n(n+4) > 0 \Leftrightarrow n \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$

★ Si $n > 0$, $\sqrt{n^2 + 4n} > n$, y los α reales se obtienen únicamente de:

$\alpha^2 = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4n}}{2n}$. Luego fijado $n > 0$ obtenemos dos soluciones, una

para cada α : $(x, y) = \left(\frac{n + \sqrt{n^2 + 4n}}{2}, \pm n \sqrt{\frac{n + \sqrt{n^2 + 4n}}{2n}} \right)$.

★ Si $n < -4$, es $\sqrt{n^2 + 4n} < |n|$, luego $\frac{n \pm \sqrt{n^2 + 4n}}{2n}$ da dos valores

mayores que cero para α^2 . De ahí que obtengamos cuatro valores reales de α :

$\alpha = \pm \sqrt{\frac{n \pm \sqrt{n^2 + 4n}}{2n}}$ y en consecuencia cuatro soluciones:

$(x, y) = (\alpha^2 n, \alpha n)$

b) Nos están pidiendo para qué valores de n la serie geométrica $x + y + n + \dots$ es convergente.

Para que una serie geométrica, cuyo primer término es no nulo, sea convergente, es necesario y suficiente que el valor absoluto de la razón sea menor que 1.

i) Si $n \neq 0$, es $x \neq 0$ y la razón es $\frac{y}{x}$. La serie es convergente

si y sólo si $\left| \frac{y}{x} \right| < 1$,

lo que equivale a $|y| < |x|$, o bien $x^2 - y^2 > 0$. En consecuencia,

si $n \neq 0$ la serie es convergente si y sólo si $n > 0$ (pues $n = x^2 - y^2$).

ii) Si $n = 0$, vimos que $x = y = 0$; luego la serie es convergente.

★ En resumen, la serie es convergente si y sólo si $n \geq 0$.