EJEMPLO DE PROBLEMA

PROBLEMA DE ALGEBRA

Sea f un automorfismo de R^4 que verifica $f^2+I=0$, donde I y 0 son los automorfismos identidad y nulo de R^4. Probar que:

a) f es un automorfismo de R^4.

b) Existe una base de R^4 en la que f tiene por matriz $M=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

c) Si A es la matriz de f en una base dada, entonces det(A)=1.

Solución:

a) $f^2+I=0\Rightarrow f\circ f=-I\Rightarrow f\circ(-f)=I$ de donde **f** tiene inverso y, por tanto, es un automorfismo.

b) Sea $\vec{u_1}\neq\vec{0}$ $\vec{u_2}=f(\vec{u_1})$. Supongamos que $\vec{u_1},\vec{u_2}$ son linealmente dependientes entonces $\vec{u_2}=\lambda\vec{u_1}$ y sen tendría que $\left.\begin{array}{l}f(\vec{u_2})=f^2(\vec{u_1})=-\vec{u_1}\\ f(\vec{u_2})=\lambda f(\vec{u_1})=\lambda\vec{u_2}=\lambda^2\vec{u_1}\end{array}\right\}\Rightarrow\lambda^2=-1$ lo cual es absurdo y, por tanto, $\{\vec{u_1},\vec{u_2}\}$ son linealmente independientes.

Consideremos ahora $\vec{u_3}\in\left(R^4-L[\vec{u_1},\vec{u_2}]\right)$ y $\vec{u_4}=f(\vec{u_3})$. Con estos vectores se tiene $f(\vec{u_2})=f(f(\vec{u_1}))=-\vec{u_1}$ y análogamente se tiene también $f(\vec{u_4})=f(f(\vec{u_3}))=-\vec{u_3}$.

Veamos que $\{\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3},\vec{u_4}\}$ son linealmente independientes. Sean para ello $\lambda_1,\ldots,\lambda_4\in R$ tales que $\lambda_1\vec{u_1}+\lambda_2\vec{u_2}+\lambda_3\vec{u_3}+\lambda_4\vec{u_4}=\vec{0}\Rightarrow\lambda_1\vec{u_1}+\lambda_2\vec{u_2}=-\lambda_3\vec{u_3}-\lambda_4\vec{u_4}(*)$, y aplicando **f** obtenemos,

$\lambda_1 f(\vec{u_1})+\lambda_2 f(\vec{u_2})=-\lambda_3 f(\vec{u_3})-\lambda_4 f(\vec{u_4})\Rightarrow\lambda_1\vec{u_2}-\lambda_2\vec{u_1}=-\lambda_3\vec{u_4}+\lambda_4\vec{u_3}(**)$. Con las igualdades **(*) y (**)** podemos eliminar $\vec{u_4}$:

$$\lambda_3(\lambda_1\overrightarrow{\boldsymbol{u}_1}+\lambda_2\overrightarrow{\boldsymbol{u}_2})-\lambda_4(\lambda_1\overrightarrow{\boldsymbol{u}_2}-\lambda_2\overrightarrow{\boldsymbol{u}_1})=\lambda_3(-\lambda_3\overrightarrow{\boldsymbol{u}_3}-\lambda_4\overrightarrow{\boldsymbol{u}_4})-\lambda_4(-\lambda_3\overrightarrow{\boldsymbol{u}_4}+\lambda_4\overrightarrow{\boldsymbol{u}_3})=(-\lambda^2{}_3-\lambda^2{}_4)\overrightarrow{\boldsymbol{u}_3}$$

Así $(-\lambda^2{}_3-\lambda^2{}_4)\overrightarrow{\boldsymbol{u}_3}\in \boldsymbol{L}\left[\overrightarrow{\boldsymbol{u}_1},\overrightarrow{\boldsymbol{u}_2}\right]$, de donde $-\lambda^2{}_3-\lambda^2{}_4=0\Rightarrow\lambda_3=\lambda_4=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=0$, ya que $\overrightarrow{\boldsymbol{u}_1},\overrightarrow{\boldsymbol{u}_2}$ son linealmente independientes. Por tanto, hemos probado que $\left\{\overrightarrow{\boldsymbol{u}_1},\overrightarrow{\boldsymbol{u}_2},\overrightarrow{\boldsymbol{u}_3},\overrightarrow{\boldsymbol{u}_4}\right\}$ son linealmente independientes, luego constituyen una base de $\mathbf{R}^4$

Como hemos visto que $\boldsymbol{f}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}_1})=\overrightarrow{\boldsymbol{u}_2}$ $\boldsymbol{f}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}_2})=-\overrightarrow{\boldsymbol{u}_1}$ $\boldsymbol{f}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}_3})=\overrightarrow{\boldsymbol{u}_4}$ $\boldsymbol{f}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}_4})=-\overrightarrow{\boldsymbol{u}_3}$, se deduce que la matriz de **f** respecto de dicha base es $\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ como queríamos demostrar.

c) Sea **P** la matriz del cambio de base entre la base dada y la obtenida en el apartado **b)**. Entonces **A=PMP^{-1}**, luego se tiene que **det(A)=(det(P))(det(M))(det(P^{-1}))=det(M)=1**.